Ein weiterer Hauptsatz über das Messen als Grundlage der Hilbert-Raumstruktur der Quantenmechanik

GÜNTHER LUDWIG

Institut für Theoretische Physik der Universität Hamburg

(Z. Naturforschg. **22 a**, 1324—1327 [1967]; eingegangen am 28. Juni 1967)

Herrn Professor Dr. PASCUAL JORDAN *zum 65. Geburtstag gewidmet*

In einer früheren Arbeit [1] des Verfassers wurden Hauptsätze über das Messen formuliert und diskutiert, die HILBERT-Raum-ähnliche Strukturen zu Folge haben. Das in [1] vorgeschlagene System von Axiomen läßt aber wahrscheinlich noch andere Realisationen als den HILBERT-Raum zu. In dieser Arbeit wird ein weiterer Hauptsatz so formuliert, daß im „endlich dimensionalen Fall“ (siehe Axiom 1 η endlich aus [1]) als irreduzible Lösungen nur noch HILBERT-Räume über dem Körper der reellen oder komplexen Zahlen oder der Quaternionen übrig bleiben. Der formulierte Hauptsatz ist im wesentlichen eine Art modulares Postulat, wie es von vielen an die „Propositions“ gestellt wurde [siehe [2] „loi de couverture“ (siehe Anm. [3]), Theorem 8 und Axiom 12].

Man kann aber dieses Postulat als Aussage über Gesamtheiten so formulieren, daß es sich leicht und anschaulich physikalisch interpretieren läßt. Ebenso läßt es sich sofort auf den unendlich dimensionalen Fall übertragen, so daß der Verband der abgeschlossenen Teilräume des HILBERT-Raumes (der bekanntlich nicht modular ist!) alle Axiome erfüllt.

I. Einige Konsequenzen der Axiome aus [1]

Neben den schon in [1] erwähnten Konsequenzen seien kurz einige weitere für das Folgende wichtige erwähnt.

Sei $K_-(F)$ bzw. $K_+(F)$ die Menge aller Gesamtheiten V aus K mit $\mu(V,F)=0$ bzw. $\mu(V,F)=1$. Ähnlich sei $L_-(V)$ bzw. $L_+(V)$ die Menge aller F aus $\hat{L}$ mit $\mu(V,F)=0$ bzw. $\mu(V,F)=1$. $C(V)$ war die kleinste extremale Menge, die $V\in K$ enthält. $C(V)$ konnte man (siehe [1]) physikalisch als die Menge aller möglichen Komponenten V_i der Gesamtheit V deuten, in die V als Gemisch in der Form

$$V=\lambda V_1+(1-\lambda)\,V_2 \quad \text{mit} \quad 0\leqq\lambda\leqq 1$$

zerlegt werden kann.

Für die kleinste extremale Menge $C(V_1, V_2)$, die V_1 und V_2 enthält, gilt

$$C(V_1,V_2)=C(\lambda V_1+(1-\lambda)\,V_2)$$

für jedes λ mit $0<\lambda<1$; denn erstens muß

$$C(V_1,V_2) \quad \text{auch} \quad \lambda V_1+(1-\lambda)\,V_2$$

enthalten und zweitens enthält

$$C(\lambda V_1+(1-\lambda)\,V_2)$$

auch V_1 und V_2. Es läßt sich nun zeigen [4], daß die Menge der $C(V)$ und die der $K_-(F)$ identisch sind und daß

$$C(V)=K_-\,L_-(V)$$

gilt. Da in [5] bewiesen wurde, daß der Verband der $K_-(E)$ orthokomplementär und orthomodular ist, gilt dasselbe für den Verband der $C(V)$. Hierbei ist die Orthogonalität

$$C(V_1)\perp C(V_2)$$

über die Entscheidungseffekte definiert: Jedem $C(V)$ ist verbandstheoretisch isomorph durch $K_+(E)=C(V)$ ein Entscheidungseffekt E zugeordnet. $C(V_1)\perp C(V_2)$ heißt dasselbe wie $E_1\perp E_2$. Ist speziell

$$C(V_1)\perp C(V_2),$$
$$C(V_3)\supseteq C(V_1) \quad \text{und} \quad C(V_3)\cap C(V_2)=\emptyset,$$

so gilt also wegen der Orthomodularität (siehe [1], Seite 1320)

$$C(V_3)\;\cap C(\tfrac{1}{2}V_1+\tfrac{1}{2}V_2)=C(V_1). \qquad (1)$$

Hieraus folgt weiter (siehe Anhang 1): Sind V_1 und V_2 zwei Gesamteinheiten mit $C(V_1)\perp C(V_2)$, V_3 eine Komponente des Gemischs $\frac{1}{2}V_1+\frac{1}{2}V_2$ [d. h.

[1] G. LUDWIG, Z. Naturforschg. **22 a**, 1303 [1967].
[2] C. PIRON, Helv. Phys. Acta **38**, 439 [1964].
[3] M. D. MACLAREN, Notes on Axioms for Quantum Mechanics, Report ANL-7065, Argonne National Laboratory 1965.
[4] G. DÄHN, Zur Koordinatisierung des orthomodularen Verbandes physikalischer Entscheidungseffekte, Dissertation, Marburg 1967.
[5] G. LUDWIG, Comm. Math. Phys. **4**, 331 [1967].

$V_3 \in C(\frac{1}{2} V_1 + \frac{1}{2} V_2)$] und ist

$$C(\tfrac{1}{2} V_1 + \tfrac{1}{2} V_3) \cap C(V_2) = \emptyset\,,$$

so ist V_3 eine Komponente von V_1 [d. h. $V_3 \in C(V_1)$]. Dieser Satz hat eine physikalisch interpretierbare Form.

II. Die physikalische Bedeutung der Orthomodularität

Wenn wir versuchen, den eben formulierten Satz in seiner physikalischen Bedeutung zu diskutieren, müssen wir zunächst etwas näher auf die Voraussetzung $C(V_1) \perp C(V_2)$ eingehen. Diese Beziehung war, wie sie oben eingeführt wurde, so definiert: durch $C(V) = K_+(E)$ ist jedem $C(V)$ umkehrbar eindeutig ein E zugeordnet; $C(V_1) \perp C(V_2)$ heißt $E_1 \perp E_2$. [$E_1 \perp E_2$ war durch [1] $E_1 \leqq E_2{}^*$ definiert, wobei E^* durch $\mu(V, E) + \mu(V, E^*) = 1$ für jedes $V \in K$ festgelegt ist.]

Für alle Komponenten $V' \in C(V_1)$ und $V'' \in C(V_2)$ gilt also

$$\mu(V', E_1) = 1 \quad \text{und} \quad \mu(V'', E_1) = 0$$

$$\text{bzw.} \quad \mu(V', E_2) = 0 \quad \text{und} \quad \mu(V'', E_2) = 1\,.$$

Weiterhin sind E_1 und E_2 kommensurabel; wobei der Entscheidungseffekt „sowohl E_1 als auch E_2 werden hervorgerufen“ gleich Null ist, d. h. E_1 und E_2 sind zwei sich ausschließende Entscheidungseffekte. Aus diesen eben beschriebenen Gründen führen wir folgende Sprechweise ein: Im Falle $C(V_1) \perp C(V_2)$ nennen wir V_1, V_2 total verschieden.

Wie in [1], S. 1313, angegeben, ist in B eine Norm definiert und damit ein „Abstand“ zweier Gesamtheiten V_1, V_2 durch

$$d(V_1, V_2) \mathrel{\overline{\overline{\text{df}}}} \| V_1 - V_2 \| = \sup\{ | \mu(V_1, F) - \mu(V_2, F) | \mid F \in L \}\,.$$

Die Werte dieses Abstandes können für Gesamtheiten V aus K zwischen 0 und 1 liegen, da $0 \leqq \mu(V, F) \leqq 1$. Aus $d(V_1, V_2) = 0$ folgt $\mu(V_1, F) = \mu(V_2, F)$ für jedes $F \in L$ und damit $V_1 = V_2$. $d(V_1, V_2) = 1$ ist (wie im Anhang 2 gezeigt) äquivalent zu $C(V_1) \perp C(V_2)$, d. h. zu: V_1, V_2 total verschieden. Es folgt daraus für jedes $V' \in C(V_1)$ und $V'' \in C(V_2)$ (wegen $C(V') \subseteq C(V_1)$ z. B.) sofort, daß auch $d(V', V'') = 1$.

$d(V_1, V_2)$ kann man also physikalisch als Maß für die Verschiedenartigkeit zweier Gesamtheiten ansehen: es gibt den maximal möglichen Unterschied der Häufigkeiten eines Effektes in V_1 und V_2 [natürlich gibt es immer Effekte F mit $\mu(V_1, F) = \mu(V_2, F)$, z. B. den Einseffekt 1].

Mischt man zu der Gesamtheit V_1 einen kleinen Beitrag εV_3 einer dritten Gesamtheit V_3:

$$V = (1 - \varepsilon)\, V_1 + \varepsilon\, V_3\,,$$

so sind $d(V, V_2)$ von $d(V_1, V_2)$ nur wenig verschieden; $C(V)$ aber kann von $C(V_1)$ bei noch so kleinem ε beliebig stark abweichen. Deshalb führen wir noch den Abstand zwischen $C(V_1)$ und $C(V_2)$ ein:

$$d(C(V_1), C(V_2)) \mathrel{\overline{\overline{\text{df}}}} \operatorname{Inf}\{ d(V', V'') \mid V' \in C(V_1) \text{ und } V'' \in C(V_2) \}\,.$$

Dieser Abstand ist ein Maß, wie stark sich mindestens alle Komponenten von V_1 und V_2 unterscheiden. $d(C(V_1), C(V_2)) = 0$ besagt, daß $C(V_1)$ und $C(V_2)$ gemeinsame Komponenten oder wenigstens physikalisch nicht mehr unterscheidbare (d. h. sobald $d(V', V'')$ für ein Paar $V' \in C(V_1)$, $V'' \in C(V_2)$ sehr klein wird) Komponenten haben [daß $C(V_1) \cap C(V_2) = \emptyset$ und $d(C(V_1), C(V_2)) = 0$ ist, kann nur bei unendlich dimensionalen Räumen B und B' (Anm. [1]) auftreten]. $d(C(V_1), C(V_2)) = 1$ ist äquivalent mit $d(V_1, V_2) = 1$, d. h. damit, daß V_1 und V_2 total verschieden sind. Den Sachverhalt $C(V_1) \cap C(V_2) \neq \emptyset$ drücken wir physikalisch auch so aus: Die Gesamtheiten V_1 und V_2 haben unmittelbar gemeinsame Objekte; denn eine Gesamtheit V aus $C(V_1) \cap C(V_2)$ kann man sowohl als Komponente von V_1 wie von V_2 ansehen. Der Satz am Ende des Abschnitts I besagt nun: Nimmt man eine Komponente V_3 des Gemisches zweier total verschiedener Gesamtheiten V_1 und V_2, die weder Komponente von V_1 noch von V_2 ist, so hat aber doch jede Mischung $\frac{1}{2} V_1 + \frac{1}{2} V_3$ (bzw. $\frac{1}{2} V_2 + \frac{1}{2} V_3$) unmittelbar gemeinsame Objekte mit V_2 (bzw. V_1). Dies ist zunächst sehr merkwürdig, weil man zu einem V_3 (falls es ein solches gibt), das unmittelbar keine Objekte mit V_2 gemeinsam hat, nur ein zu V_2 total verschiedenes V_1 hinzuzumischen braucht, um dann in der Mischung unmittelbar Objekte von V_2 zu entdecken; es ist also so, als ob V_3 in verborgener Weise solche Objekte aus V_2 enthielte. Deshalb definieren wir: Eine Gesamtheit V_3 hat verborgen gemeinsame Objekte mit V_2, wenn man durch Mischen von V_3 mit einer zu V_2 total verschiedenen Gesamtheit V_1 ein Gemisch erhält, das unmittelbar gemeinsame Objekte mit V_2 hat.

Nach Anhang 3 hat dann jede zu V_2 nicht total verschiedene Gesamtheit V_1 verborgen gemeinsame Objekte mit V_2.

Soweit einige physikalische Konsequenzen der Orthomodularität des Verbandes der Entscheidungseffekte.

III. Hauptsatz über die Komponenten des Gemisches zweier Gesamtheiten

Betrachten wir zwei Gesamtheiten V_1 und V_2 mit $d(C(V_1), C(V_2)) \neq 0$ und die Mischung $\frac{1}{2}V_1 + \frac{1}{2}V_2$. V_3 sei eine Komponente dieser Mischung, total verschieden zu V_1. Wäre auch V_2 total verschieden zu V_1, (d. h. $d(V_1, V_2) = 1$), so hätte man $V_3 \in C(V_2)$, d. h. V_3 müßte Komponente von V_2 sein. Wenn aber wenigstens keine Komponente von V_2 total verschieden zu V_3 ist, was durch $d(C(V_1), C(V_2)) \neq 0$ wegen V_3 total verschieden zu V_1 garantiert ist, so hat V_3 zumindest verborgen Objekte mit V_2 gemeinsam, was durch Mischen von V_3 mit einer zu V_2 total verschiedenen Gesamtheit V_1' aus $C(\frac{1}{2}V_1 + \frac{1}{2}V_2)$ mit $C(\frac{1}{2}V_1' + \frac{1}{2}V_2) = C(\frac{1}{2}V_1 + \frac{1}{2}V_2)$ zum Vorschein käme (siehe Anhang 3). Wegen

$$C(\tfrac{1}{2}V_1 + \tfrac{1}{2}V_2) = C(\tfrac{1}{2}V_1' + \tfrac{1}{2}V_2)$$

und $d(C(V_1), C(V_2)) \neq 0$, was eine Abschwächung der Bedingung $d(C(V_1'), C(V_2)) = 1$ der totalen Verschiedenheit von V_1' und V_2 darstellt, liegt die Vermutung nahe, daß auch die Mischung von V_3 mit V_1 statt V_1' unmittelbar Objekte mit V_2 gemeinsam hat. Diese Vermutung muß experimentell getestet werden. Bisher ist keine Verletzung dieses vermuteten Sachverhalts bekannt. Wir formulieren daher als weiteren Hauptsatz über das Messen folgendes Axiom (Numerierung in Fortsetzung von [1]):

Axiom 5: Aus $V_1 \in K$, $V_2 \in K$,
$d(C(V_1), C(V_2)) \neq 0$, $V_3 \in C(\frac{1}{2}V_1 + \frac{1}{2}V_2)$
und $d(V_1, V_3) = 1$ folgt
$$C(\tfrac{1}{2}V_1 + \tfrac{1}{2}V_3) \cap C(V_2) \neq \emptyset .$$

Wie im Anhang 4 gezeigt, hat Axiom 5 zur Folge, daß der Verband der Entscheidungseffekte (im Fall eines endlich dimensionalen Raumes B) modular ist. In einer späteren mathematischen Arbeit wird gezeigt werden, daß (bei endlichdimensionalem B) jede irreduzible Lösung der Axiome 1 bis 5 isomorph ist zu den folgenden mathematischen Systemen:

K ist die Menge aller HERMITEschen Operatoren V aus einem (endlichdimensionalen) HILBERT-Raum H mit $0 \leqq V$ und $\mathrm{Sp}(V) = 1$. $\hat{L}$ ist die Menge aller HERMITEschen Operatoren F desselben HILBERT-Raumes H mit $0 \leqq F \leqq 1$; $\mu(V, F) = \mathrm{Sp}(VF)$. Der Körper der Skalare aus H kann der Körper der reellen oder komplexen Zahlen oder der Quaternionen sein.

In dieser Arbeit wollen wir zum Schluß noch eine Bemerkung zum „klassischen Fall", in dem alle Entscheidungseffekte miteinander kommensurabel sind, anfügen. Man kann nämlich leicht das Axiom 5 so verschärfen, daß nur der klassische Fall übrig bleibt:

Axiom 5k: Aus $V_1 \in K$, $V_2 \in K$,
$d(C(V_1), C(V_2)) \neq 0$, $V_3 \in C(\frac{1}{2}V_1 + \frac{1}{2}V_2)$
und $d(V_1, V_3) = 1$ folgt $C(V_3) \cap C(V_2) \neq \emptyset$.

Axiom 5k ist also in der Weise gegenüber Axiom 5 verschärft, als V_3 selbst (nicht erst die Mischung mit V_1) schon gemeinsame Objekte mit V_2 haben muß. Wie im Anhang 4 gezeigt, folgt aus Axiom 5k die Kommensurabilität aller Entscheidungseffekte. Den klassischen Fall kann man statt durch Axiom 2k aus [1] also auch durch Axiom 5k aussondern.

Anhang 1

In einem orthomodularen Verband ist für $a \geqq b$ und $b \perp c$:

$$a \cap (b \cup c) = b \cup (a \cap c),$$

Ist speziell $a \cap c = 0$, so folgt $a \cap (b \cup c) = b$. Für ein $d \leqq b \cup c$ erhält man mit $a = b \cup d$:

$$(b \cap d) \cup (b \cup c) = b \cup ((b \cup d) \cap c).$$

Ist $$(b \cup d) \cap c = 0,$$

so folgt wegen $b \cup d \leqq b \cup b \cup c = b \cup c$:

$$b \cup d = b, \quad \text{d. h.} \quad d \leqq b.$$

Setzen wir $b = C(V_1)$, $c = C(V_2)$, $d = C(V_3)$, $b \cup d = C(\frac{1}{2}V_1 + \frac{1}{2}V_3)$, so folgt $C(V_3) \subseteq C(V_1)$, d. h. $V_3 \in C(V_1)$; q.e.d.

Anhang 2

Aus $d(V_1, V_2) = 1$ folgt, daß es mindestens ein F gibt mit $\mu(V_1, F) = 1$ und $\mu(V_2, F) = 0$ oder ein F' mit $\mu(V_1, F') = 0$ und $\mu(V_2, F') = 1$; dann erfüllt $F = 1 - F'$ aber die erste Bedingung, so daß wir uns auf diese beschränken können. Diese aber ist äquivalent zu $L_+(V_1) \cap L_-(V_2) \neq \emptyset$. In jeder Menge $L_+(V)$ gibt es ein minimales Element, einen Entscheidungseffekt E, in $L_-(V)$ ein maximales Element, einen Entscheidungseffekt, der gerade E^* ist[5]. Also besteht $L_+(V_1) \cap L_-(V_2)$ gerade aus allen Effekten F mit $F \geqq E_1$ und $F \leqq E_2^*$. $L_+(V_1) \cap L_-(V_2)$ ist also dann und nur dann nicht leer, wenn $E_1 \leqq E_2^*$, d. h. $E_1 \perp E_2$ ist. Die Menge $C(V)$ ist aber gerade $K_+ L_+(V) = K_+(E)$; also ist $d(V_1, V_2) = 1$ dann und nur dann, wenn $C(V_1) \perp C(V_2)$ ist.

Anhang 3

Sei $d(V_1, V_2) \neq 1$. Es gibt ein V_1' mit $C(\frac{1}{2} V_1 + \frac{1}{2} V_2) = C(\frac{1}{2} V_2 + \frac{1}{2} V_1')$ und $d(V_1', V_2) = 1$, was folgendermaßen bewiesen werden kann: Mit $a = C(V_2)$, $b = C(V_1)$ ist $a \cup b = a \cup b'$ mit $b' \perp a$, da der Verband orthomodular ist. Nach [4] gibt es ein V_1' mit $b' = C(V_1')$. Wegen $b' \leqq a \cup b$ ist $V_1' \in C(\frac{1}{2} V_1 + \frac{1}{2} V_2)$. Da $d(V_1, V_2) \neq 1$, kann nicht $V_1 \in C(V_1')$ sein. Nach dem Satz aus Abschnitt II hat also $\frac{1}{2} V_1' + \frac{1}{2} V_1$ unmittelbar Objekte mit V_2 gemeinsam.

Anhang 4

Zu zeigen ist, daß der Verband der $C(V)$, der isomorph zum Verband der Entscheidungseffekte ist, modular ist. Mit $a = C(V_1)$, $b = C(V_2)$ folgt aus $a \cap b = 0$ (bei endlich dimensionalem Gesamtheitenraum B, siehe Anm. [1]) auch $d(C(V_1), C(V_2)) \neq 0$, da in einem endlich dimensionalen Raum zwei beschränkte, abgeschlossene Mengen mit leerem Durchschnitt einen endlichen Abstand haben. Mit $c = C(V_3)$ folgt aus $V_3 \in C(\frac{1}{2} V_1 + \frac{1}{2} V_2)$ $c \leqq a \cup b$. $C(\frac{1}{2} V_1 + \frac{1}{2} V_3) \cap C(V_2)$ ist gleich $(a \cup c) \cap b$. $d(V_1, V_3) = 1$ besagt $c \perp a$. Axiom 5 kann dann in der Form geschrieben werden:

Aus $a \cap b = 0$, $c \leqq a \cup b$, $c \perp a$ und $(a \cup c) \cap b = 0$ folgt

$$c = 0\,. \tag{2}$$

Seien d, e, f drei Elemente des Verbandes mit $d \geqq e$. Da der Verband orthomodular ist, gibt es ein $b \perp (d \cap f)$ mit $f = (d \cap f) \cup b$. Daraus folgt

$$d \cap [(d \cap f) \cup b] \geqq d \cap d \cap f = d \cap f$$

und

$$d \cap [(d \cap f) \cup b] \geqq d \cap b$$

und damit

$$d \cap f = d \cap [(d \cap f) \cup b] \geqq (d \cap f) \cup (d \cap b).$$

Da $d \cap b \perp d \cap f$, muß also $d \cap b = 0$ sein. Wir können also schreiben:

$$d \cap (e \cup f) = d \cap [e \cup (d \cap f) \cup b] = d \cap (a \cup b)$$

mit $a = e \cup (d \cap f)$, wobei $d \cap b = 0$ und wegen $d \geqq e$ und $d \geqq d \cap f$ auch $d \geqq a$ ist. Mit $l = d \cap (a \cup b)$ ist dann $a \cup b \geqq l$, $l \cap b \leqq a \cap b = 0$ und $l \geqq d \cap a = a$. Daher gibt es ein c mit $l = a \cup c$ und $c \perp a$. Aus $c \leqq l$ folgt auch $c \leqq a \cup b$. Außerdem ist $0 = l \cap b = (a \cup c) \cap b$. Wegen $a \leqq l$ ist auch $a \cap b \leqq l \cap b = 0$. Nach (2) ist aber dann $c = 0$ und damit $l = a \cup c = a$, d. h. $d \cap (a \cup b) = a$. Da $a \cup b$ per Definition von a und b gleich $e \cup f$ ist, folgt

$$d \cap (e \cup f) = e \cup (d \cap f)\,,$$

und damit die modulare Eigenschaft des Verbandes.

Axiom 5k kann ähnlich wie Axiom 5 durch (2) ausgedrückt werden in der Form:

Aus $a \cup b = 0$, $c \leqq a \cup b$, $c \perp a$ und $c \cap b = 0$ folgt

$$c = 0\,. \tag{3}$$

Diese Relation kann man gleich dazu benutzen, um die Kommensurabilität zu beweisen. Bekanntlich genügt es, diese für je zwei Elemente a und b mit $a \cap b = 0$ zu beweisen, d. h. zu zeigen, daß aus $a \cap b = 0$ immer $a \perp b$ folgt.

Es gibt ein d mit $a \cup b = a \cup d$ mit $d \perp a$. Weiterhin ein c mit $d = (d \cap b) \cup c$ und $c \perp d \cap b$. Wie oben folgt dann $b \cap c = 0$. Aus $c \leqq d$ und $d \perp a$ folgt auch $c \perp a$ und damit nach (3) $c = 0$, d. h. $d = d \cap b$. Damit wird $b = (d \cap b) \cup g = d \cup g$ mit $g \perp d \cap b = d$. Aus $g \perp d$ und $g \leqq a \cup d$ und $d \perp a$ folgt $g \leqq a$ und damit $0 = a \cap b = a \cap (d \cup g) = g$, d. h. schließlich $b = d$ und damit $b \perp a$.